



08
επαναληπτικά
θέματα

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΠΙΛΟΓΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1^ο

- A.1. Θεωρία από Σχ. Βιβλίο σελ. 92
 A.2. Θεωρία από Σχ. Βιβλίο σελ. 149
 A.3. Απόδειξη από Σχ. Βιβλίο σελ. 28-29
 B. $\alpha \rightarrow$ Λάθος
 $\beta \rightarrow$ Σωστό
 $\gamma \rightarrow$ Σωστό
 $\delta \rightarrow$ Λάθος
 $\varepsilon \rightarrow$ Λάθος

Θέμα 2^ο

- α) Πρέπει $x+2 \geq 0$ και $\sqrt{x+2} - 2 \neq 0$
 $x \geq -2$ και έστω $\sqrt{x+2} - 2 = 0$
 τότε $\sqrt{x+2} = 2$
 $x+2 = 4$
 $x = 2$
 Άρα $\sqrt{x+2} - 2 \neq 0$ όταν $x \neq 2$.

Οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το $[-2, 2) \cup (2, +\infty)$.

- β) Τα ζητούμενα σημεία είναι αυτά για τα οποία ισχύει $f(x)=0$. Άρα:
 $x^2 - 4 = 0$ και $x \in [-2, 2) \cup (2, +\infty)$
 $x^2 = 4$ και $x \in [-2, 2) \cup (2, +\infty)$
 $x = \pm 2$ και $x \in [-2, 2) \cup (2, +\infty)$

Άρα $x = -2$.

Οπότε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης με τον x' είναι το $M(-2, 0)$.

$$\begin{aligned} \gamma) \quad f(x) &= \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x+2} - 2} = \frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x+2})^2 - 2^2} = \\ &= \frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2} + 2)}{x+2-4} = \frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2} + 2)}{x-2} = (x+2)(\sqrt{x+2} + 2) \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2)(\sqrt{x+2}+2) = (2+2)(\sqrt{4}+2) = 4 \cdot 4 = 16$$

δ) Ο πίνακας γίνεται:

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i
1	4	0,1	4	0,1
2	16	0,4	20	0,5
3	12	0,3	32	0,8
4	8	0,2	40	1
Σύνολο	40	1	-	-

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{4}{40} = 0,1$$

$$N_1 = v_1 = 4$$

$$F_1 = f_1 = 0,1$$

$$f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{16}{40} = 0,4, \quad N_2 = v_1 + v_2 = 4 + 16 = 20$$

$$F_2 = f_1 + f_2 = 0,1 + 0,4 = 0,5$$

$$f_4 = \frac{v_4}{v} \Rightarrow v_4 = f_4 \cdot v = 0,2 \cdot 40 = 8$$

$$N_4 = v = 40 \quad \text{και} \quad F_4 = 1$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 40 \Rightarrow 4 + 16 + v_3 + 8 = 40 \Rightarrow v_3 = 40 - 28 = 12$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{12}{40} = 0,3, \quad N_3 = N_2 + v_3 = 20 + 12 = 32$$

$$F_3 = F_2 + f_3 = 0,5 + 0,3 = 0,8$$

Θέμα 3^ο

α) Στον παρακάτω πίνακα «διπλής εισόδου» καταγράφουμε τα δεδομένα μας.

Φύλλο \ Τμήμα	Διοικητικό τμήμα	Τεχνικό τμήμα	Σύνολο
Άνδρες	10	50	60
Γυναίκες	30	10	40
Σύνολο	40	60	100

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{50}{100} = 0,5$$

B_1 : «είναι το ενδεχόμενο το άτομο να είναι άνδρας»

B_2 : «είναι το ενδεχόμενο το άτομο να εργάζεται στο διοικητικό τμήμα».

$$\begin{aligned} B &= (B_1 \cup B_2) \Rightarrow P(B) = P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2) \\ &= \frac{60}{100} + \frac{40}{100} - \frac{10}{100} = \frac{90}{100} = 0,9 \end{aligned}$$

β) Το άθροισμα των ηλικιών όλων των υπαλλήλων θα είναι:

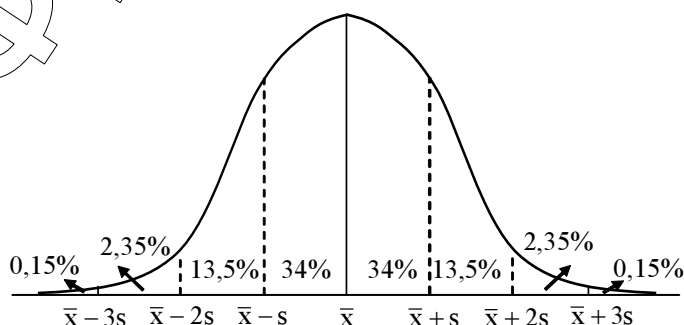
$$\sum_{i=1}^{100} t_i = 60 \cdot 40 + 40 \cdot 40 = 2400 + 1600 = 4000$$

Μετά την πρόσληψη των νεότερων υπαλλήλων το άθροισμα των ηλικιών των υπαλλήλων θα είναι:

$$\bar{y} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v t_i \quad \text{άρα} \quad \sum_{i=1}^v t_i = v \cdot \bar{y} \quad \text{δηλαδή} \quad \sum_{i=1}^{100} t_i = 100 \cdot 39,6 = 3960$$

Έστω c το πλήθος των ατόμων που αποχώρησαν. Επειδή θα προσληφθούν c άτομα αλλά κατά 4 χρόνια νεότερα, θα ισχύει ότι: $4000 - 3960 = 4c$ δηλαδή $4c = 40$ άρα $c = 10$

γ) Η καμπύλη συχνοτήτων στην κανονική κατανομή είναι:

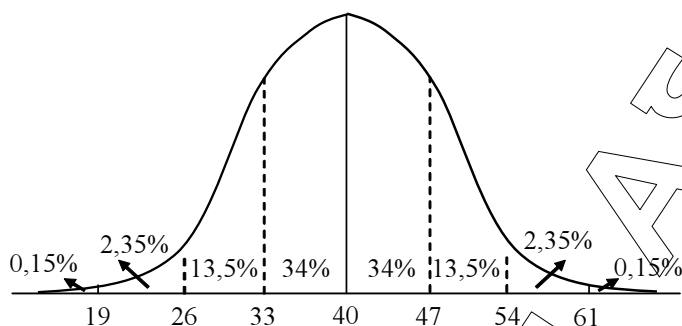


Επειδή το 2,5% (δηλαδή 2,35% + 0,15% = 2,5%) των υπαλλήλων έχει ηλικία το πολύ 26 χρόνια, $\bar{x} - 2s = 26$ **(1)**

Η μέση ηλικία όλων των υπαλλήλων είναι: $\bar{x} = \frac{60 \cdot 40 + 40 \cdot 40}{100} = 40$

Από τη σχέση **(1)** έχουμε: $2s = 14 \Leftrightarrow s = 7$.

Επομένως η καμπύλη συχνοτήτων θα είναι:



Κάτω από 33 χρόνια θα είναι το 13,5% + 2,35% + 0,15% = 16% των υπαλλήλων της εταιρίας δηλ. $\frac{16}{100} \cdot 100 = 16$ υπάλληλοι.

δ) Είναι: $s^2 = \frac{1}{100} \left[\sum_{i=1}^k v_i x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^k v_i x_i \right)^2}{100} \right] \Leftrightarrow S^2 = \frac{\sum_{i=1}^k v_i x_i^2}{100} - \frac{\left(\sum_{i=1}^k v_i x_i \right)^2}{100^2} \Leftrightarrow$

$$100^2 s^2 = 100^2 \frac{\sum_{i=1}^k v_i x_i^2}{100} - \frac{\left(\sum_{i=1}^k v_i x_i \right)^2}{100^2} \Leftrightarrow 100^2 s^2 = 100 \cdot \sum_{i=1}^k v_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k v_i x_i \right)^2$$

$$\Leftrightarrow 10000 s^2 = 250000 \Leftrightarrow S^2 = 25 \Leftrightarrow S = 5$$

Στην κανονική κατανομή το εύρος $R \approx 6s$, επομένως $R \approx 30$.

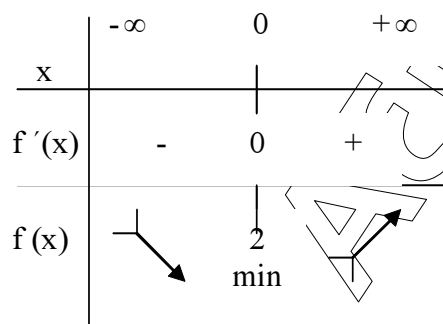
Θέμα 4^ο

A. Είναι: $x = \frac{x + 5e^x + x + 4 - 7x + 1}{5} = \frac{5e^x - 5x + 5}{5} = e^x - x + 1$

Έστω $f(x) = e^x - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = e^x - 1$.

Έχουμε $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$



Για $x=0$ η f παρουσιάζει ελάχιστο το $m = f(0) = 2$

B. Για $m=2$ είναι: $g(x) = 2x^2 - \kappa^2 x + 3$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $g'(x) = 4x - \kappa^2$.

Η εφαπτομένη της C_g στο $A(1, g(1))$ είναι παράλληλη στον $x'x$ όταν $g'(1) = 0$

$$\Leftrightarrow 4 - \kappa^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \kappa^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\kappa = 2 \text{ ή } \kappa = -2 \text{ (απορρίπτεται αφού } \kappa \in \Omega)$$

Άρα $\kappa = 2$.

$$E = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$\text{Οπότε } P(E) = \frac{N(E)}{N(\Omega)} = \frac{6}{7}$$

Γ. Αφού $A \subset B$ τότε $A \cap B = A$ και $P(A \cap B) = P(A)$ οπότε

$$h(x) = \frac{3 - 2 \cdot P(A)}{12} x^3 + \frac{P(A)}{2} x^2 + x + 2008, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $h'(x) = \frac{3 - 2 \cdot P(A)}{4} x^2 + P(A) \cdot x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

$$\Delta = P^2(A) - 4 \cdot \frac{3 - 2 \cdot P(A)}{4} \cdot 1 = P^2(A) - 3 + 2 \cdot P(A) = P^2(A) + 2 \cdot P(A) + 1 - 4 =$$

$$= (P(A) + 1)^2 - 4 < 0 \text{ γιατί:}$$

Το ενδεχόμενο A αποκλείεται να είναι ο δειγματικός χώρος Ω (διότι αν ήταν, θα έπρεπε και $B = \Omega$, άτοπο αφού $A \neq B$) άρα $P(A) \neq 1$ και επειδή $0 \leq P(A) \leq 1$ έπεται ότι $0 \leq P(A) < 1$ άρα $P(A) + 1 < 2$ οπότε $(P(A) + 1)^2 < 4$.

(εναλλακτικά: το τριώνυμο $P^2(A) + 2 \cdot P(A) - 3$ έχει $\Delta' = 16$ και ρίζες τις -3 και 1 οπότε για $P(A) \in [0, 1)$ είναι $P^2(A) + 2 \cdot P(A) - 3 < 0$).

Αφού $\Delta < 0$ η $h'(x)$ παίρνει τιμές ομόσημες του $\frac{3 - 2 \cdot P(A)}{4}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
και αφού $\frac{3 - 2 \cdot P(A)}{4}$ φανερά θετικό, έχω $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η
συνάρτηση h είναι γνήσια αύξουσα στο \mathbb{R} .

Φροντιστήρια Αξιώτη
Κ. Τούμπα