



08  
επαναληπτικά  
θέματα

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ  
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A. α.** Έστω δυο συναρτήσεις  $f, g$  ορισμένες σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν

- οι  $f, g$  είναι συνεχείς στο  $\Delta$  και
- $f'(x) = g'(x)$  για κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ ,

να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά  $c$  τέτοια, ώστε για κάθε  $x \in \Delta$  να ισχύει:

$$f(x) = g(x) + c$$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 6**

**β.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = x^v, v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει:

$$f'(x) = vx^{v-1}$$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

**B.** Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1, z_2$ . Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ):

**α.** Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των  $z_1$  και  $z_2$  είναι το άθροισμα των διανυσματικών τους ακτίνων.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

**β.** Είναι:  $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

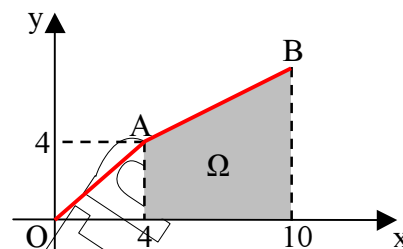
**γ.** Είναι:  $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

**δ.** Η εξίσωση  $|z - z_1| = |z - z_2|$  με  $z_1 \neq z_2$  παριστάνει τη μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα τα σημεία  $A(z_1)$  και  $B(z_2)$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

- Γ. Έστω η συνάρτηση  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ , όπου  $f$  η συνάρτηση του διπλανού σχήματος που η γραφική της παράσταση αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα  $OA$  και  $AB$ . Το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου  $\Omega$  είναι  $E(\Omega) = 36$  τ.μ. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:



α.  $F(0) =$       β.  $F(4) =$       γ.  $F(10) =$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 6**

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x + \lambda, & \text{αν } x > 0 \\ (\mu - 1)x + 1, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$  με  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

- α. Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$ , ώστε η  $f$  να είναι συνεχής. **ΜΟΝΑΔΕΣ 6**
- β. Να βρείτε την τιμή του  $\mu$ , ώστε η  $f$  να είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$ . **ΜΟΝΑΔΕΣ 8**
- γ. Να αποδείξετε ότι η  $f$  δεν είναι 1-1. **ΜΟΝΑΔΕΣ 3**
- δ. Για  $\lambda = 1$  και  $\mu = 2$ , να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int_{-2}^{\pi} f(x) dx$ . **ΜΟΝΑΔΕΣ 8**

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = e^{1-e^x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- α. i. Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία. **ΜΟΝΑΔΕΣ 4**
- ii. Να αποδείξετε ότι  $f'(x) = (e^x - 1) \cdot e^{1+e^x - e^x}$ , να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και να βρείτε το σημείο καμψής της γραφικής της παράστασης. **ΜΟΝΑΔΕΣ 5**
- β. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ . **ΜΟΝΑΔΕΣ 6**
- γ. Να παραστήσετε γραφικά την  $f$ . **ΜΟΝΑΔΕΣ 4**
- δ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της  $f'(x)$ , τους άξονες  $x'x$ ,  $y'y$  και την ευθεία  $x = \ln \frac{1}{2}$ . **ΜΟΝΑΔΕΣ 6**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Οι συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχείς και για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$  ισχύουν:

$$\int_1^x f(t) dt - 2 = x \int_0^x g(t) dt \quad (1) \quad \text{και} \quad g(x) \neq 0 \quad (2)$$

Να αποδείξετε ότι:

- α. Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$  και  $f'(0) = 2g(0)$  **ΜΟΝΑΔΕΣ 6**
- β.  $g(x) < 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  **ΜΟΝΑΔΕΣ 5**
- γ.  $\int_1^x f(t) dt \leq \int_1^0 f(t) dt$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  **ΜΟΝΑΔΕΣ 7**
- δ. Η εξίσωση  $f(x) = 2g(x) + 2$  έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα  $(0, 1)$ . **ΜΟΝΑΔΕΣ 7**