



08  
επαναληπτικά  
θέματα

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ  
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

- A. α. Βλέπε Πόρισμα σελίδα 251 σχολικού βιβλίου.  
β. Βλέπε σελίδα 224 σχολικού βιβλίου.
- B. α. (Σ), β. (Σ), γ. (Σ), δ. (Σ).
- Γ. α. 0, β. 8, γ. 44

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

- α. Η  $f$  είναι συνεχής για  $x < 0$ , ως πολυωνμική και για  $x > 0$ , ως άθροισμα της τριγωνομετρικής  $\eta\mu x$  με την σταθερή  $c(x) = \lambda$ . Στο  $x_0 = 0$  έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta\mu x + \lambda) = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ((\mu - 1)x + 1) = 1$$

Ακόμα  $f(0) = 1$ . Για να είναι η συνάρτηση συνεχής στο  $x_0 = 0$  πρέπει και αρκεί:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Επομένως, η ζητούμενη τιμή είναι  $\lambda = 1$ .

- β. Για  $x > 0$  έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x + \lambda - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

Για  $x < 0$  έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\mu - 1)x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\mu - 1)x}{x} = \mu - 1$$

Για να είναι η συνάρτηση παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$  πρέπει και αρκεί:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow \mu - 1 = 1 \Leftrightarrow \mu = 2$$

Επομένως, η ζητούμενη τιμή είναι  $\mu = 2$ .

- γ. Είναι π.χ.  $f(0) = f(\pi) = \lambda$ , άρα η συνάρτηση δεν είναι 1-1.

δ. Είναι

$$f(x) = \begin{cases} \eta\mu x + 1, & \text{αν } x > 0 \\ x + 1, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$$

και

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx = \int_{-2}^0 (x+1) dx + \int_0^{\pi} (\eta\mu x + 1) dx = \\ &= \left[ \frac{x^2}{2} + x \right]_{-2}^0 + [-\sigma\upsilon\nu x + x]_0^{\pi} = \pi + 2 \end{aligned}$$

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

α. i. Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι :

$$f'(x) = (e^{1+x-e^x})' = (1-e^x)' \cdot e^{1+x-e^x} = -e^x e^{1+x-e^x} = -e^{1+x-e^x}$$

Επειδή  $e^{1+x-e^x} > 0$  είναι  $f'(x) < 0$  στο  $\mathbb{R}$ , άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$

ii. Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$f''(x) = (-e^{1+x-e^x})' = -(1+x-e^x)' \cdot e^{1+x-e^x} = -(1-e^x)' \cdot e^{1+x-e^x} = (e^x - 1) \cdot e^{1+x-e^x}$$

$$\text{Έτσι: } f''(x) = 0 \Leftrightarrow (e^x - 1) \cdot e^{1+x-e^x} = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{και } f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0, \quad f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) \neq 0$  στο διάστημα  $(-\infty, 0)$ , άρα στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα  $(-\infty, 0]$ . Ακόμα είναι  $f'(x) > 0$  στο διάστημα  $(0, +\infty)$ , άρα η  $f$  στρέφει τα κοίλα άνω στο  $[0, +\infty)$ .

Τέλος, η συνάρτηση έχει σημείο καμψής το  $(0, f(0))$ , γιατί εκατέρωθεν του αλλάζει κυρτότητα και υπάρχει η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης σ' αυτό, αφού είναι παραγωγίσιμη.

Είναι  $f(0) = e^{1-1} = e^0 = 1$  έτσι, η συνάρτηση έχει σημείο καμψής το  $(0, 1)$ .

β. Θα βρούμε, αν υπάρχουν, τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{1-e^x}) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{1-e^x})$$

Θέτουμε  $u = 1 - e^x$  οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} u = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^x) = 1 - 0 = 0$$

Τότε είναι:

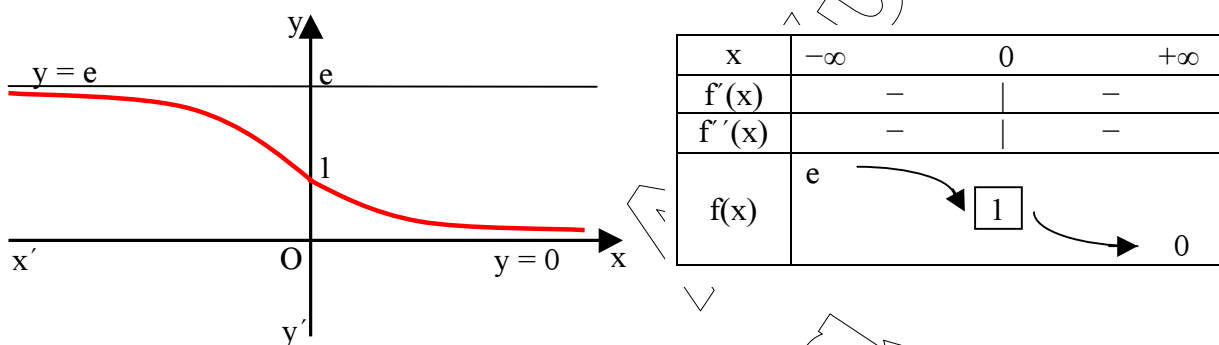
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{1-e^x}) = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$$

και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{1-e^x}) = \lim_{u \rightarrow 1} (e^u) = e$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει οριζόντια ασύμπτωτη την  $y = 0$  στο  $+\infty$  και την  $y = e$  στο  $-\infty$ .

- γ. Με βάση τις πληροφορίες των προηγούμενων ερωτημάτων σχεδιάζουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης:



- δ. Στο α ερώτημα βρήκαμε  $f'(x) < 0$ , οπότε  $|f'(x)| = -f'(x)$  και έτσι:

$$\begin{aligned} E &= \int_{\ln \frac{1}{2}}^0 |f'(x)| dx = - \int_{\ln \frac{1}{2}}^0 f'(x) dx = - [f(x)]_{\ln \frac{1}{2}}^0 = -f(0) + f\left(\ln \frac{1}{2}\right) = \\ &= -e^{1-e^0} + e^{1-e^{\ln \frac{1}{2}}} = -1 + e^{1/2} \text{ τμ} \end{aligned}$$

#### **ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

- α. Επειδή οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι συνεχείς, οι συναρτήσεις  $\int_1^x f(t) dt$  και  $\int_1^x f(t) dt$ , που ορίζονται από ολοκλήρωμα, είναι παραγωγίσιμες, έτσι μπορούμε να παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της (1), οπότε έχουμε:

$$\left( \int_1^x f(t) dt - 2 \right)' = \left( x \int_0^x g(t) dt \right)'$$

$$\text{ή } f(x) = x g(x) + \int_0^x g(t) dt \quad (3)$$

Για  $x = 0$  παίρνουμε:  $f(0) = 0 + \int_0^0 g(t) dt = 0$

Με  $x \neq 0$  από την (3) έχουμε:

$$\frac{f(x)}{x} = g(x) + \frac{\int_0^x g(t) dt}{x}$$

και:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( g(x) + \frac{\int_0^x g(t) dt}{x} \right)$$

Επειδή η  $g$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , άρα και στο  $x_0 = 0$ , είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$ .

Η συνάρτηση  $h(x) = \int_0^x g(t) dt$ ,  $x \in \mathbb{R}$  είναι παραγωγίσιμη, άρα είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ , οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x g(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = h(0) = \int_0^0 g(t) dt = 0$$

Επομένως, το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x g(t) dt}{x}$$

είναι μορφή  $0/0$  και υπολογίζεται με τον κανόνα του De L' Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x g(t) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\int_0^x g(t) dt)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{1} = g(0)$$

Έτσι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( g(x) + \frac{\int_0^x g(t) dt}{x} \right) = 2g(0)$$

οπότε, τελικά:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2g(0)$$

β. Η (1) για  $x = 1$  δίνει  $-2 = \int_0^1 g(t) dt$  (4)

Επειδή η  $g(x)$  δεν μηδενίζεται και είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  διατηρεί πρόσημο σ' αυτό. Αν ήταν  $g(x) > 0$  τότε

$$\int_0^1 g(t) dt > 0 \Leftrightarrow -2 > 0$$

Άτοπο. Άρα είναι  $g(x) < 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

γ. Η (1) για  $x = 0$  δίνει  $\int_1^0 f(t) dt - 2 = 0 \Leftrightarrow \int_1^0 f(t) dt = 2$  (5)

Είναι  $g(x) < 0 \Leftrightarrow -g(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , έτσι:

- με  $x \geq 0$  είναι  $\int_0^x [-g(t)] dt \geq 0 \Leftrightarrow \int_0^x g(t) dt \leq 0$ , άρα:  $x \int_0^x g(t) dt \leq 0$

- με  $x < 0$  είναι  $\int_x^0 [-g(t)] dt > 0 \Leftrightarrow \int_x^0 g(t) dt > 0$ , άρα:  $x \int_0^x g(t) dt < 0$

Επομένως, για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  από την (1) είναι:

$$x \int_0^x g(t) dt \leq 0 \Leftrightarrow \int_1^x f(t) dt - 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \int_1^x f(t) dt \leq 2$$

$$[\int_1^0 f(t) dt = 2 \text{ από (5)}]$$

$$\Leftrightarrow \int_1^x f(t) dt \leq \int_1^0 f(t) dt$$

**2<sup>ος</sup> τρόπος:** Έστω η συνάρτηση  $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ ,  $x \in \mathbb{R}$  για την οποία  $F'(x) = f(x)$ . Από την (3), αφού  $g(x) < 0$ , βρίσκουμε:

- με  $x > 0$  είναι  $f(x) = x g(x) + \int_0^x g(t) dt < 0 \Leftrightarrow F'(x) < 0$
- με  $x = 0$  είναι  $f(0) = 0 \Leftrightarrow F'(x) = 0$
- με  $x < 0$  είναι  $f(x) = x g(x) + \int_0^x g(t) dt > 0 \Leftrightarrow F'(x) > 0$

οπότε η  $F(x)$  έχει μέγιστο το  $F(0)$ , άρα για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ :

$$F(x) \leq F(0) \Leftrightarrow \int_1^x f(t) dt \leq \int_1^0 f(t) dt$$

δ. (Απόδειξη με Rolle σε αρχική). Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$H(x) = \int_0^x f(t) dt - 2 \int_0^x g(t) dt - 2x \text{ με } x \in [0, 1]$$

Επειδή οι  $f, g$  είναι συνεχείς, οι συναρτήσεις  $\int_0^x f(t) dt$  και  $\int_0^x g(t) dt$  ως οριζόμενες από ολοκλήρωμα, είναι παραγωγίσιμες. Ακόμα η  $-2x$  είναι παραγωγίσιμη, ως πολυωνυμική, άρα η  $H(x)$ , ως αλγεβρικό άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, είναι:

- Παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, άρα και στο  $(0, 1)$  με

$$H'(x) = f(x) - 2g(x) - 2$$

- συνεχής στο  $[0, 1]$ , ως παραγωγίσιμη σ' αυτό.  
Ακόμα:

- $H(0) = 0$  και

$$\begin{aligned} H(1) &= \int_0^1 f(t) dt - 2 \int_0^1 g(t) dt - 2 \\ &= - \int_0^1 f(t) dt - 2 \int_0^1 g(t) dt - 2 \\ &= -2 - 2(-2) - 2 = 0 \quad [ \text{από (4) και (5)} ] \end{aligned}$$

Επομένως, εφαρμόζεται για την  $H(x)$  το θεώρημα του Rolle, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (0, 1)$  με

$$H'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) - 2g(\xi) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = 2g(\xi) + 2,$$

που σημαίνει ότι το  $\xi$  είναι ρίζα στο  $(0, 1)$  της εξίσωσης  $f(x) = 2g(x) + 2$ .